

Trajectoire d'un projectile

Prise en compte de la traînée

Pour une version vidéo de ce cours, c'est par [ici](#).

Nous connaissons la fonction qui décrit la trajectoire d'un projectile en prenant en compte l'angle de tir, la vitesse initiale et la gravité.

Dans le sens de x :

On reprend la définition de la vitesse, on résout pour dx et on intègre des deux côtés.

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}$$

$$\int_0^x dx = v_{0x} \int_0^t dt$$

$$x = v_{0x}t$$

Dans le sens de y :

Comme il y a une accélération, on reprend sa définition et on intègre deux fois : une fois sur la vitesse (d'une vitesse initiale v_{0y} dans le sens de y à une certaine vitesse v), puis sur la position verticale y .

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$\int_{v_{0y}}^v dv = -g \int_0^t dt$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_{0y} - gt) dt$$

$$y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

Combinant ces deux expressions, on obtient une fonction décrivant la trajectoire d'un projectile :

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$$

Et la portée x_{max} est logiquement donnée lorsqu' y est à zéro :

$$0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x_{max} - \frac{g}{2v_{0x}^2}x_{max}^2$$
$$x_{max} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

C'est assez simple et explicable en une demi-page.

Ce qui est moins simple et qui s'explique en une *demi-douzaine* de pages, c'est lorsqu'on tente de prendre en compte la force de traînée. Et c'est ce que ce document propose de faire.

Un projectile est une masse qui est lancée à la fois à l'horizontale et à la verticale. Lors de la montée, le projectile ressent deux forces à la verticale, toutes les deux négatives : la gravité et la traînée. Lors de la descente, elle ressent toujours deux forces mais la traînée est devenue positive. A l'horizontale, la masse ne ressent qu'une force : la traînée. Nous allons donc :

- Trouver une expression pour la vitesse et la position verticale du projectile quand il monte
- Trouver une expression pour la vitesse et la position verticale du projectile quand il descend
- Trouver une expression pour la vitesse et la position horizontale du projectile
- Combiner ces expressions pour obtenir une fonction décrivant la trajectoire d'un projectile soumis à une traînée : $y(x)$

Pour finir, nous décrirons une méthode approximative d'obtenir une courbe représentant cette fonction. Ce sera plus simple, et ce sera une manière sympa de vérifier que nous avons bien

maîtrisé les mathématiques utilisées pour ce projet et méritons de parler de nous-mêmes à la première personne du pluriel.

Montée

Au début, le projectile ressent deux forces s'opposant à son mouvement : la force due à la gravité F_g et la traînée F_d . Par la seconde loi de Newton, on trouve l'accélération :

$$F_g + F_D = ma$$

$$-mg - \frac{1}{2}\rho SC_d v^2 = m\mathbf{a}$$

On résout donc pour l'accélération, qu'on remplace par sa définition, et on organise de manière à obtenir une équation séparable – ça consiste simplement à factoriser g :

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\rho SC_d}{2m} v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \left(1 + \frac{\rho SC_d}{2mg} v^2 \right)$$

On opère une substitution pour plus de lisibilité :

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho SC_d}{2mg}}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + \beta^2 v^2)$$

On sépare les variables et nous obtenons enfin nos intégrales dont les limites sont d'une vitesse initiale horizontale v_0 à une certaine vitesse v :

$$\int_{v_{0y}}^v \frac{dv}{1 + \beta^2 v^2} = -g \int_0^t dt$$

Substituons βv pour u :

$$u = \beta v$$

$$du = \beta dv$$

$$dv = \frac{du}{\beta}$$

$$\frac{1}{\beta} \int_{v_{0y}}^v \frac{du}{1 + u^2} = -g dt$$

On passe ensuite le β de l'autre côté.

$$\int_{v_{0y}}^v \frac{du}{1 + u^2} = -\beta g dt$$

C'est ici qu'il faut s'accrocher...

On peut prouver par ailleurs et par le test cette relation :

$$\frac{d(\tan^{-1}(x))}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Il en découle logiquement la réciproque, ce qui nous donne la primitive de $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \tan^{-1}(x) + c$$

Fort de cette information, nous pouvons intégrer en prenons soin d'adapter les limites à notre substitution :

$$u = \beta v$$

$$\int_{\beta v_{0y}}^{\beta v} \frac{du}{1 + u^2} = -\beta g t$$

$$\tan^{-1}(\beta v) - \tan^{-1}(\beta v_{0y}) = -\beta g t$$

Et nous résolvons enfin pour v :

$$v_y = \frac{1}{\beta} \tan(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t)$$

Attention toutefois : cette expression n'est plus valable lorsqu'on atteint $v = 0$.

$$0 = \frac{1}{\beta} \tan(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t_{lim})$$

$$0 = \tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t_{lim}$$

On détermine donc le temps t_{lim} auquel cette vitesse est atteinte :

$$\beta g t_{lim} = \tan^{-1}(\beta v_{0y})$$

$$t_{lim} = \frac{\tan^{-1}(\beta v_{0y})}{\beta g}$$

Maintenant, on cherche une expression pour la trajectoire. Comme on est dans la direction verticale, on peut trouver à ce point une expression pour y .

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$dy = v dt$$

$$y = \int_0^t v dt$$

$$\int_0^y dy = \frac{1}{\beta} \int_0^t \tan(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t) dt$$

Opérons une substitution pour voir... Ça devrait marcher puisque le premier terme est constant...

$$u = \tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t$$

$$du = -\beta g dt$$

$$dt = -\frac{du}{\beta g}$$

La substitution fonctionne : appliquons-là en faisant attention à adapter les limites d'intégration.

$$y = -\frac{1}{\beta^2 g} \int_{\tan^{-1}(\beta v_{0y})}^{\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t} \tan(u) du$$

Un meilleur prof que moi pourrait prouver par ailleurs et par le test la relation suivante :

$$\int \tan(x) dx = -\ln(\cos(x)) + c$$

Ce qui nous donne cette expression :

$$y = -\frac{1}{\beta^2 g} [-\ln(\cos(u))]_{\tan^{-1}(\beta v_{0y})}^{\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t}$$

$$y = -\frac{1}{\beta^2 g} \left(\ln(\cos(\tan^{-1}(\beta v_{0y}))) - \ln(\cos(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t)) \right)$$

Ah, elle est jolie, celle-là ! Et elle va être facile à entrer sur une feuille de calculs... On note que la hauteur maximale sera atteinte lorsque $t = t_{lim}$:

$$y_{max} = -\frac{1}{\beta^2 g} \left(\ln(\cos(\tan^{-1}(\beta v_{0y}))) - \ln(\cos(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g t_{lim})) \right)$$

$$y_{max} = -\frac{1}{\beta^2 g} \left(\ln(\cos(\tan^{-1}(\beta v_{0y}))) - \ln\left(\cos\left(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g \frac{\tan^{-1}(\beta v_{0y})}{\beta g}\right)\right) \right)$$

$$y_{max} = -\frac{1}{\beta^2 g} \ln(\cos(\tan^{-1}(\beta v_{0y})))$$

Très bien. On a fait un tiers du boulot. Passons maintenant à la descente.

Descente

C'est une chute libre – le projectile commence à une vitesse v_0 puis accélère vers le bas – on utilise encore la seconde loi de Newton :

$$F_g + F_d = ma$$

$$\frac{1}{2} \rho C_d S v^2 - mg = ma$$

On opère la substitution à nouveau :

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\rho C_d S v^2}{2m}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \left(1 - \frac{\rho C_d S v^2}{2mg} \right)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho S C_d}{2mg}}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 - \beta^2 v^2)$$

Cette fois, les limites d'intégration sont d'une vitesse $v = 0$ à une certaine vitesse v , et du temps auquel nous avons atteint $v = 0$ au bout de la montée du projectile, c'est à dire t_{lim} :

$$\int_0^{v_y} \frac{dv}{1 - \beta^2 v^2} = -g \int_{t_{lim}}^t dt$$

On opère une substitution sur le côté gauche :

$$u = \beta v$$

Ce qui donne quelque chose de plus lisible :

$$\frac{1}{1 - u^2}$$

Une autre identité bien utile est celle-ci :

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{1 + u} \frac{1}{1 - u} = \frac{A}{1 + u} + \frac{B}{1 - u}$$

Après quelques tests avec des valeurs aléatoires pour u , on trouve que $A = B = \frac{1}{2}$. Notre intégrale devient donc, après substitution de u :

$$\frac{1}{2} \int_0^{v_y} \frac{dv}{1 + \beta v} + \frac{1}{2} \int_0^{v_y} \frac{dv}{1 - \beta v} = -g \int_{t_{lim}}^t dt$$

Et les intégrales sont maintenant intégrables :

$$\int_0^{v_y} \frac{dv}{1 + \beta v} + \int_0^{v_y} \frac{dv}{1 - \beta v} = -2g \int_{t_{lim}}^t dt$$

On opère une substitution pour chaque intégrale du côté gauche, et on intègre :

Terme 1	Terme 2	Terme 1 : $\frac{1}{\beta} \int \frac{1}{u} du$	Terme 2 : $-\frac{1}{\beta} \int \frac{1}{u} du$
$u = 1 + \beta v$ $dv = \frac{du}{\beta}$	$u = 1 - \beta v$ $dv = -\frac{du}{\beta}$	$\frac{1}{\beta} (\ln(u) + C)$	$-\frac{1}{\beta} (\ln(u) + C)$

On multiplie les deux côtés par β et on obtient une équation à résoudre pour v .

$$\frac{1}{\beta} [\ln(u)]_1^{1+\beta v_y} - \frac{1}{\beta} [\ln(u)]_1^{1-\beta v_y} = -2gt + 2gt_{lim}$$

$$\ln(1 + \beta v_y) - \ln(1 - \beta v_y) = 2\beta g(t_{lim} - t)$$

Par la propriété des logarithmes $\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$, on réécrit notre équation :

$$\ln\left(\frac{1 + \beta v_y}{1 - \beta v_y}\right) = 2\beta g(t_{lim} - t)$$

Et on résout pour v :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \beta v_y}{1 - \beta v_y} &= e^{2\beta g(t_{lim} - t)} \\ 1 + \beta v_y &= e^{2\beta g(t_{lim} - t)} - \beta v_y e^{2\beta g(t_{lim} - t)} \\ \beta v_y + \beta v_y e^{2\beta g(t_{lim} - t)} &= e^{2\beta g(t_{lim} - t)} - 1 \\ v_y &= \frac{1 e^{2\beta g(t_{lim} - t)} - 1}{\beta (1 + e^{2\beta g(t_{lim} - t)})} \end{aligned}$$

Alternativement, on peut utiliser l'identité $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$$\tanh^{-1}(\beta v_y) = \beta g(t_{lim} - t)$$

$$v_y = \frac{1}{\beta} \tanh(\beta g(t_{lim} - t))$$

Comme ça donne quelque chose de plus facile à écrire, c'est celle que je vais utiliser.

Pour trouver la position en fonction du temps, on reprend à nouveau la définition de la vitesse :

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$dy = v_y dt$$

On sait ce qu'il nous reste à faire : remplacer v_y par l'expression que nous avons trouvée, et prendre l'intégrale des deux côtés. Attention aux limites d'intégration : on part d'un temps t_{lim} et d'une hauteur y_{max} .

$$\int_{y_{max}}^y dy = \frac{1}{\beta} \int_{t_{lim}}^t \tanh(\beta g t_{lim} - \beta g t) dt$$

On opère donc une substitution – on peut, puisque le premier terme est constant, et le terme variable n'est pas au carré :

$$u = \beta g t_{lim} - \beta g t$$

$$du = -\beta g dt$$

$$dt = -\frac{du}{\beta g}$$

$$y - y_{max} = -\frac{1}{\beta^2 g} \int_0^{\beta g t_{lim} - \beta g t} \tanh(u) du$$

On peut trouver par ailleurs que $\int \tanh(x) dx = \ln(\cosh(x))$. Pas moi, mais on me dit qu'on le peut.

$$y = -\frac{1}{g\beta^2} [\ln(\cosh(u))]_0^{\beta g t_{lim} - \beta g t} + y_{max}$$

$$y = -\frac{1}{g\beta^2} \ln(\cosh(\beta g t_{lim} - \beta g t)) + y_{max}$$

Deux tiers du boulot terminé. Passons maintenant à l'horizontale.

Horizontale

Dans cette direction, il n'y a pas de gravité, donc les choses devraient être plus simples.

On met en place la loi de Newton et on remplace a par sa définition :

$$F_d = ma$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho C_D S}{2m} v^2$$

Opérons une petite substitution :

$$\alpha = \frac{\rho C_D S}{2m}$$

L'intégrale devrait elle aussi être plus simple :

$$\int_{v_{0x}}^v \frac{dv}{v^2} = -\alpha dt$$

A partir de là, c'est roue libre :

$$\frac{1}{v_{0x}} - \frac{1}{v} = -\alpha t$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_{0x}} + \frac{v_{0x} \alpha t}{v_{0x}}$$

$$v_x = \frac{v_{0x}}{1 + v_{0x} \alpha t}$$

Et la position x donne par intégration une jolie expression :

$$dx = \frac{v_{0x}}{1 + v_{0x} \alpha t} dt$$

$$u = 1 + v_{0x} \alpha t$$

$$du = v_{0x} \alpha dt$$

$$dt = \frac{du}{v_{0x} \alpha}$$

$$dx = \frac{1}{\alpha} \int_1^{1+v_{0x}\alpha t} \frac{1}{u} du$$

$$x = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + v_{0x}\alpha t)$$

Trajectoire $y(x)$

Il est enfin temps de combiner la position x avec la position y .

Tout d'abord, nous reprenons la limite à laquelle les équations pour y doivent changer :

$$x_{lim} = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + v_{0x}\alpha t_{lim})$$

Pour rappel, voici à quoi t_{lim} est égal :

$$t_{lim} = \frac{\tan^{-1}(\beta v_{0y})}{\beta g}$$

Ensuite, on résout la fonction x pour t , et on l'intègre aux fonctions y :

$$e^{\alpha x} = 1 + v_{0x}\alpha t$$

$$t = \frac{e^{\alpha x} - 1}{v_{0x}\alpha}$$

De 0 à x_{lim} :

$$y(x) = -\frac{1}{\beta^2 g} \left(\ln \left(\cos \left(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) \right) \right) - \ln \left(\cos \left(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) - \beta g \frac{e^{\alpha x} - 1}{v_{0x}\alpha} \right) \right) \right)$$

De x_{lim} à x :

$$y(x) = -\frac{1}{\beta^2 g} \ln \left(\cosh \left(\beta g t_{lim} - \beta g \frac{e^{\alpha x} - 1}{v_{0x}\alpha} \right) \right) + y_{max}$$

Simulation

Avant de commencer à programmer une feuille de calculs, on dirait qu'il serait une bonne idée de dresser une liste de toutes les constantes qu'on a défini au fur et à mesure de ce travail.

Tout d'abord, les vitesses initiales : $v_{0x} = v_0 \cos(\theta)$ $v_{0y} = v_0 \sin(\theta)$ Le coefficient de traînée d'une sphère : $C_D \approx 0.4$

Ensuite, la masse volumique du fluide dans lequel le projectile se déplace (je choisis l'air) : $\rho \approx 1.3 \text{ kg.m}^{-3}$

Le rayon et la surface frontale de la sphère : $S = 4\pi r^2$ La gravité : $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$

La masse volumique de la sphère, le volume de la sphère et la masse de la sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $m = \rho V$

Je pourrai ainsi modifier les paramètres du projectile facilement.

Reste les constantes que nous avons créées :

$$t_{lim} = \frac{\tan^{-1}(\beta v_{0y})}{\beta g}$$

$$\alpha = \frac{\rho C_D S}{2m}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho S C_d}{2mg}}$$

$$y_{max} = -\frac{1}{\beta^2 g} \ln \left(\cos \left(\tan^{-1}(\beta v_{0y}) \right) \right)$$

$$x_{lim} = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + v_{0x} \alpha t_{lim})$$

Approximation

Il faut l'admettre, trouver $y(x)$ n'est pas une mince affaire – il a fallu à cet imposteur de prof de maths une bonne journée pour la trouver, la tester, la corriger, la tester à nouveau, jusqu'à écrire ces deux expressions avec une confiance relative mais élevée.

Par l'approximation, on devrait trouver la même chose sans passer par l'étape *trouver la fonction* $y(x)$. Il suffit, à chaque pas, d'évaluer l'évolution de la vitesse et de la distance parcourue.

Dans le sens de x :

En reprenant la seconde loi de Newton, on peut écrire ceci :

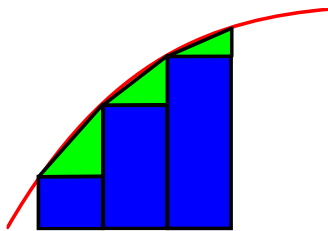
$$\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x^2$$

Par approximation, on en déduit cela :

$$\Delta v_x = -\alpha v_x^2 \Delta t$$

On peut donc construire une suite numérique de premier terme v_{x_0} et de raison $-\alpha v_x^2 \Delta t$ telle que le terme suivant est égal au terme précédent plus le changement de vitesse:

$$v_{xn} = v_{xn-1} - \alpha v_{xn-1}^2 \Delta t$$



Pour trouver x_n , il faut se rappeler que l'aire sous la courbe $v(t)$ est la distance parcourue. On calcule donc le produit de la vitesse à $n - 1$ par le temps Δt (l'aire du rectangle), on lui ajoute le produit de la différence entre v_n et v_{n+1} avec Δt qu'on divise par deux (l'aire du triangle), et on ajoute le tout à la position précédente.

$$\Delta x = v_{n-1} \Delta t + \frac{v_n - v_{n-1}}{2} \Delta t$$

On peut donc construire une suite numérique de **premier terme** $x_0 = 0$ et de **raison** $v_{n-1} \Delta t + \frac{v_n - v_{n-1}}{2} \Delta t$:

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} \Delta t + \frac{v_n - v_{n-1}}{2} \Delta t$$

Dans le sens de y , il faut se rappeler du changement de direction de F_d à x_{lim} . On aura :

Jusqu'à x_{lim} :

$$v_{yn} = v_{yn-1} - g(1 + \beta^2 v_{yn-1}^2) \Delta t$$

A partir de x_{lim} :

$$v_{yn} = v_{yn-1} - g(1 - \beta^2 v_{yn-1}^2) \Delta t$$

Et pour y :

$$y_n = y_{n-1} + v_{n-1}\Delta t + \frac{v_n - v_{n-1}}{2}\Delta t$$

Et à quoi ça ressemblerait sur une feuille de calculs ?

On créerait une colonne contenant la suite numérique pour x . Pour la suite numérique pour y , on placerait les deux formules dans une fonction SI (cond. ; VRAI ; FAUX), la condition étant ceci :

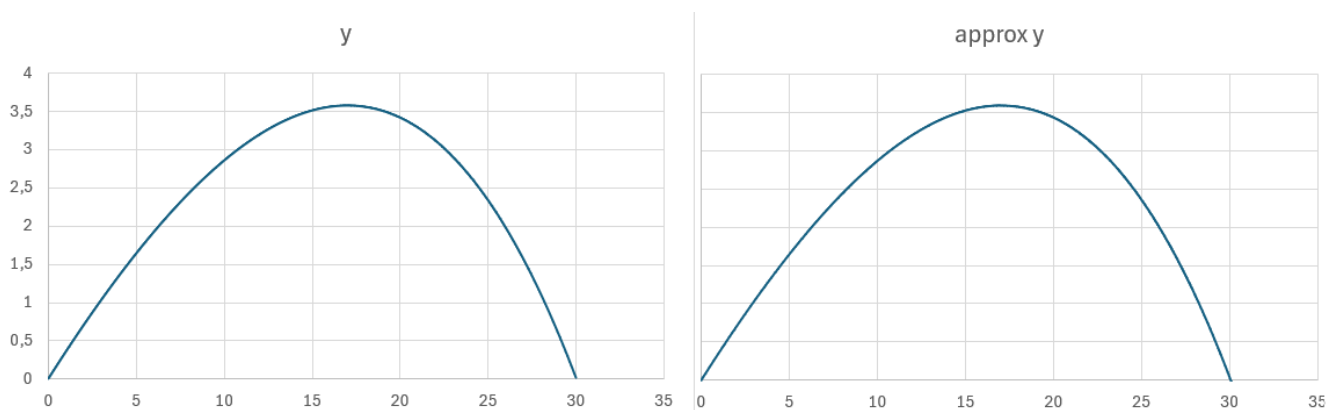
$$x_{lim} = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + v_{0x}\alpha t_{lim}) \text{ avec } t_{lim} = \frac{\tan^{-1}(\beta v_{0y})}{\beta g}$$

Pour la condition $x < x_{lim}$:

$$\text{VRAI} = v_{yn-1} - g(1 + \beta^2 v_{yn-1}^2)\Delta t$$

$$\text{FAUX} = v_{yn-1} - g(1 - \beta^2 v_{yn-1}^2)\Delta t$$

Comparant la fonction $y(x)$ à cette approximation, on obtient les deux courbes suivantes.



L'analyse et l'approximation sont en accord, ce qui est une indication que l'analyse (prendre les intégrales, définir les limites, etc.) est bonne. Cet imposteur de prof de maths est content.